Traitement du signal avec Scilab : puissance et densité spectrale de puissance

En électronique des télécommunications, une transmission d'information est liée à une transmission d'énergie.
Au niveau d'un récepteur, le signal reçu un signal aléatoire informatif (s'il était connu, donc déterministe, il ne serait pas nécessaire de le transmettre), associé à un signal aléatoire parasite, le bruit.

L'étude des propriétés spectrales d'un signal aléatoire se fait par l'étude de sa densité spectrale de puissance. En effet, on ne peut connaître la transformée de Fourier du signal, car il serait alors possible de retrouver le signal lui-même, qui ne serait plus alors aléatoire mais déterministe. Par contre, il est possible de déterminer dans quelle bande de fréquence le signal émet de l'énergie, ce qui équivaut à étudier sa densité spectrale d'énergie ou de puissance.
Les notions de puissance, d'énergie et de densité spectrale de puissance sont donc primordiales en traitement du signal, en particuliers en ce qui concerne les télécommunications.
L'objectif de cette séance est de se familiariser avec ces notions.

1 Puissance normalisée d'un signal complexe

La puissance normalisée d'un signal est définie comme la puissance délivrée par le signal dans une résistance de 1 Ω.
Pour un signal s(t) complexe ou réel, l'expression de cette puissance est :

$$\boxed{p(t) = s(t)\ s^*(t) = \|s(t)\|^2 \qquad \text{en } V^2 \text{ si } s(t) \text{ est en } V}$$

où s*(t) représente le conjugué de s(t).

On remarquera que la multiplication d'un complexe par son conjugué donne un réel (le module au carré), la puissance normalisée est donc un nombre réel.

La puissance P est liée à l'énergie E par la relation :

$$p = \frac{dE}{dt}$$

L'énergie fournie entre deux instants t_1 et t_2 peut être calculée par :

$$E_{t1\text{-}t2} = \int_{t_1}^{t_2} s(t)\, s^*(t)\, dt \qquad \text{en } V^2 s \text{ si } s(t) \text{ est en } V$$

2 Cas des signaux à énergie finie

Dans le cas de signaux à énergie finie, on peut alors calculer l'énergie totale en remplaçant les bornes d'intégration par les bornes infinies.
Si on appelle S(f) la transformée de Fourier de s(t), l'énergie totale du signal peut également être calculée par :

$$\boxed{E = \int_{-\infty}^{+\infty} \|S(f)\|^2\, df = \int_{-\infty}^{+\infty} \|s(t)\|^2\, dt \qquad \text{en } V^2 s \text{ ou V/Hz si } s(t) \text{ est en } V}$$

Cette relation est nommée **théorème de Parseval**.

L'intégration de l'expression $\|s(t)\|^2$ sur une bande de temps donnant une énergie, $\|s(t)\|^2$ peut être vue comme une densité temporelle d'énergie ; pour une valeur t_0 quelconque, $\|s(t_0)\|^2$ est un nombre réel.

L'intégration de l'expression $\|S(f)\|^2$ sur une bande de fréquence donnant une énergie, $\|S(f)\|^2$ peut être vue comme une densité spectrale (ou fréquentielle) d'énergie ; pour une valeur f_0 quelconque, $\|S(f_0)\|^2$ est un nombre réel exprimé en V^2s^2 ou encore en V^2s/Hz.
Dans le cas de signaux à énergie finie, la notion de puissance ne présente pas d'intérêt.

3 Cas de signaux à puissance finie

Lorsque le signal n'est pas à énergie finie (signal périodique, signal informatif transmis sur un intervalle de temps supposé infini, bruit etc…), l'étude se fait sur une certaine durée d'observation.
On distingue alors deux cas de figure, les signaux périodiques et apériodiques

3.1 Signaux périodiques

La durée d'observation correspond à la période du signal. L'énergie totale étant infinie, on se contente d'étudier la puissance moyenne :

$$\boxed{P_{MOY} = \frac{1}{T}\int_0^T \|s(t)\|^2 \, dt \quad \text{en } V^2 \text{ si } s(t) \text{ est en } V}$$

Vérifions que cette définition correspond bien aux résultats « classiques ».
Calculer les puissances instantanée et moyenne dans le cas des signaux suivants :
$s_1 = A \sin \omega t$
$s_2 = A\, e^{j\omega t}$
Vérifier que l'on retrouve bien la puissance $A^2/2$ pour le signal sinusoïdal et A^2 pour le second.
Vérifier en représentant le module du spectre de chacun des signaux et en effectuant le calcul à partir de cette représentation (on rappelle que le théorème de superposition permet de dire que dans un système linéaire la puissance totale est la puissance fournie par chacune des raies).

Un signal périodique de période T=1/F peut être décomposé en série de Fourier :

$$s(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n \, e^{j2\pi Ft} \quad \text{où } c_n \text{ sont les termes de la décomposition en série de Fourier}$$

Les résultats de l'électronique linéaire nous permettent d'appliquer le théorème de superposition et ainsi calculer la puissance moyenne normalisée en faisant la somme des puissances apportées par chaque harmonique :

$$\boxed{P_{MOY} = \frac{1}{T}\int_0^T \|s(t)\|^2 \, dt = \sum_{-\infty}^{+\infty} \|c_n\|^2}$$

Cette égalité exprime le théorème de Parseval pour les signaux périodiques.

En suivant le même raisonnement que celui qui nous a permis d'introduire le terme « densité spectrale d'énergie », on peut dire que la fonction qui associe chaque valeur de fréquence à la valeur $\|c_n\|^2$ correspondante peut être vue comme une densité spectrale de puissance.
Même si cette remarque présente peu d'intérêt dans le cas d'un signal déterministe, elle permet l'introduction de la notion de densité spectrale de puissance pour un signal aléatoire.

Remarque : on pourra vérifier simplement la véracité de l'égalité précédente dans le cas d'un signal sinusoïdal.

3.1.1 Interaction entre deux signaux périodiques

A partir de deux signaux périodiques $s_1(t)$ et $s_2(t)$, on peut définir la puissance instantanée de s_1 sur s_2 par :

$$p(t)=s_1(t)\ .\ s_2^*(t)$$

ainsi que la puissance moyenne de la même manière que précédemment.

Attention : dans le cas de signaux complexes, la puissance de s_1 sur s_2 est différente de la puissance de s_2 sur s_1.

> Reprendre alors le même calcul que lors du paragraphe précédent en considérant une tension u(t) et un courant i(t) d'amplitudes crêtes respectives U et I, le courant étant en retard d'un angle ϕ sur la tension.
> On remarquera alors que la représentation sinusoïdale conduit bien au résultat attendu, à savoir une puissance temporelle fluctuante à 2 ω dont la valeur moyenne est bien 0,5 UI cosϕ.
> Dans le cas de la représentation exponentielle, on arrive par contre à une puissance "instantanée" qui ne dépend plus du temps, et qui conduit à la représentation vectorielle classique de la puissance apparente (si on a calculé la puissance du u sur i).
> Pour obtenir la puissance moyenne active, il faut alors prendre la partie réelle de la puissance apparente (et la partie imaginaire pour la puissance réactive).
> Dans certains cas (propagation sur ligne par exemple), où la représentation exponentielle facilite les calculs, mais où on a également besoin d'avoir un calcul de puissance active moyenne correspondant à la réalité physique d'un signal sinusoïdal, on introduit parfois l'expression suivante :
>
> $$P_{MOY} = \frac{1}{2}\mathcal{Re}(v\ i^*)$$
>
> Il faut cependant garder à l'esprit, que la représentation d'un signal réel sinusoïdal par un signal complexe exponentiel, n'est qu'une modélisation mathématique.

3.2 Signaux apériodiques

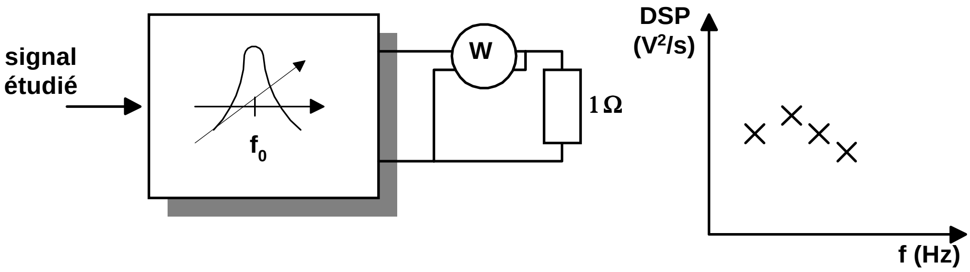
La puissance moyenne sur l'intervalle d'observation est alors :

$$P_{MOY} = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\|s(t)\|^2\ dt$$

On peut définir comme précédemment la densité spectrale de puissance comme la fonction DSP(f) qui intégrée sur l'espace des fréquences donne la puissance moyenne :

$$\boxed{P_{MOY} = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\|s(t)\|^2\ dt = \int_{-\infty}^{+\infty} DSP(f)\ df}$$

Physiquement, la fonction DSP(f) peut être tracée en reportant en fonction de la fréquence, la puissance produite par le signal (dans une résistance de 1 Ω) à travers un filtre très sélectif, la fréquence centrale de ce dernier fournissant la valeur d'abscisse. On modifie ensuite cette dernière et on trace le point suivant.



Nous verrons que la DSP peut se déterminer en calculant la transformée de Fourier de la fonction d'auto corrélation (théorème de Wiener-Kintchine).

Si on souhaite calculer la puissance moyenne fournie dans une certaine bande de fréquence, il suffit d'intégrer de la DSP sur cet intervalle.

Attention : la DSP étant une fonction paire pour un signal réel, on se contente souvent d'une DSP mono-latérale, d'amplitude deux fois plus grande que la bi-latérale dans la bande de fréquence allant de 0 à l'infini.

Les signaux aléatoires sont considérés comme des signaux à puissance finie.

4 Cas des signaux échantillonnés

Les signaux échantillonnés étant acquis sur un nombre d'échantillons N fini, à une période $T_E=1/F_E$, ils peuvent être considérés comme des signaux à puissance finie dont la durée d'observation est $N.T_E$.

A partir de la transformée de Fourier discrète S(k) introduite lors de la séance précédente, pour un signal s(n) :

$$S(k) = \sum_{n=0}^{N-1} s(nT_E)\, e^{-2\pi j n k/N}$$

la densité spectrale de puissance est définie par :

$$\boxed{DSP(k) = \frac{1}{N}\left\|S(k)\right\|^2 = \frac{1}{N}\left\|\sum_{n=0}^{N-1} s(nT_E) e^{-2\pi j n k/N}\right\|^2}$$

Le théorème de Parseval a alors pour expression :

$$\boxed{\sum_{0}^{N-1}\left\|s(n)\right\|^2 = \frac{1}{N}\sum_{0}^{N-1}\left\|S(k)\right\|^2}$$

4.1 Application à un signal NRZ aléatoire

Un calcul théorique montre que pour un signal numérique aléatoire, la densité spectrale de puissance est donnée par l'expression suivante :

$$DSP(f) = \frac{p_0\, p_1}{T}\left\|S_0(f) - S_1(f)\right\|^2 + \frac{1}{T^2}\left\|p_0\, S_0(f) + p_1 S_1(f)\right\|^2 \sum_n \delta(f - \frac{n}{T})$$

où T représente la durée d'un bit, $S_0(f)$ et $S_1(f)$ les transformées de Fourier des symboles associés respectivement à « 0 » et « 1 », p_0 et p_1 les probabilités d'apparition de ces symboles ($p_1+p_2=1$), et $\delta(f)$ le signal de Dirac dans l'espace des fréquences.

On remarquera, que dans le cas général, cette densité spectrale de puissance est composée de la superposition d'un spectre continu et d'un spectre de raies.

Quels sont les conséquences si les bits « 1 » et « 0 » sont équiprobables ($p_0=p_1=0,5$) et de symboles identiques au signe près.

Déterminer l'expression de la DSP d'un signal aléatoire dont les « 0 » et « 1 » sont équiprobables et représentés respectivement par –5 V et 5 V. Tracer approximativement l'allure de la DSP.

Quelle est la puissance moyenne fournie par un tel signal ?

On se propose maintenant de vérifier à partir d'un signal aléatoire de 128 bits NRZ, généré par Scilab. Pour cela on utilise la fonction « rand(1,128,'n') » qui va produire une matrice de 1 ligne par 128 colonnes de nombre compris entre –1 et 1 répartis selon une loi « normale », (c'est à dire une répartition gaussienne, la moyenne étant nulle, l'écart type unitaire -voir tp suivant-). On utilise ensuite la fonction « sign » qui revoie –1 si le nombre est négatif, et +1 autrement (si on souhaite un 0 volt à la place de –1 volt, utiliser la fonction « round »). On obtient alors finalement, une équiprobabilité de « 1 » et de « 0 ».

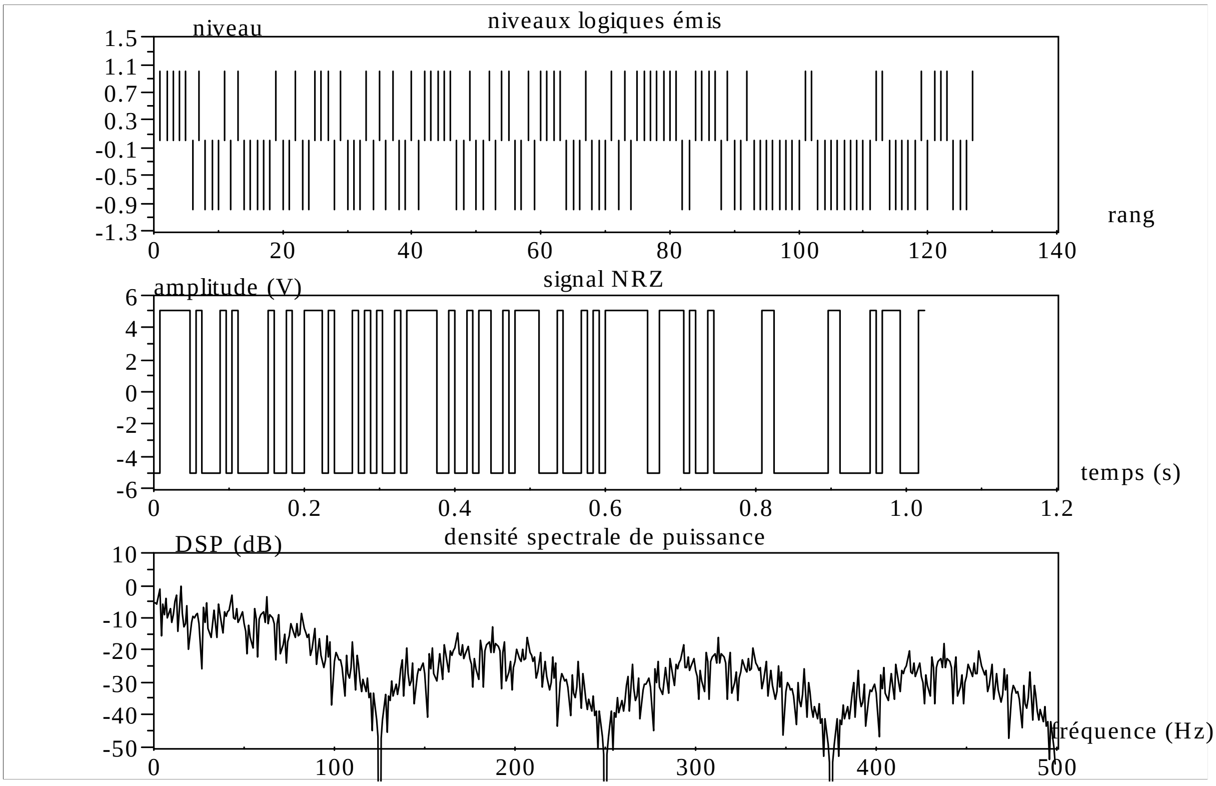
Nous avons maintenant une suite d'impulsions de valeur +/-1. Le signal « s_nrz » est obtenu en sur-échantillonnant « s » d'un coefficient de sur-échantillonnage « cse » (de façon à passer d'un signal en « dirac » à une représentation « carrée »), la fonction matrix permettant une mise en place des éléments sur 1 ligne et « N » colonnes (pour plus de renseignements, on tapera « help nom_de_fonction »).

Le signal que nous étudions n'est pas un signal échantillonné (même si notre simulation le voit comme tel) ; aussi nous ne pouvons utiliser l'expression de la DSP établie pour les signaux échantillonnés. Comme nous l'avons fait pour les signaux à temps continu avec la fonction « fft », nous corrigeons par un facteur correspondant au nombre de points affichés. L'expression devient alors :
(1/N*abs(fft(s_nrz,-1)))^2
Chaque échantillon du spectre du signal à temps continu est ainsi élevé au carré, ce qui correspond bien à la puissance normalisée
Le module de la DSP est affiché en dB. La gestion de la valeur x=0 dans l'expression « lg(x) » peut se faire en remplaçant (x) par (x+%eps) où %eps représente sous Scilab la plus faible valeur absolue possible, soit $2{,}22.10^{-16}$.

```
clear
//
// constantes : coefficient de sur-échantillonnage, nombre de symboles,
// nombre de points, période et fréquence d'échantillonnage, amplitude
cse=8; Nb=128; N=Nb*cse ; Te=1e-3; Fe=1/Te; A=5 ;
//
// vecteur temps de l'information et du signal
//
ind=(0:Nb-1);
t_nrz=Te*(0:N-1);
f=Fe/N*(0:N/2-1);
//
// signal aléatoire à + ou –1, répartition « normale »
s=sign(rand(1,Nb,'n'));
//
// sur-échantillonnage de s
s_nrz=A*(matrix(ones(cse,1)*s,1,N));
//
// calcul de la DSP
DSP=(1/N*abs(fft(s_nrz,-1)))^2;
DSPdB=10*log10( DSP(1:N/2) +%eps);
//
//
// affichage
xset("window", 0) ; xbasc(0) ; xset ("font size", 4) ;
//
xsetech([ 0, 0, 1, 1/3]) ; plot2d3(ind, s, rect=[0, -1.2, Nb, 1.2]) ;
xtitle("niveaux logiques émis" ,"rang", "niveau") ;
//
xsetech([ 0, 1/3, 1, 1/3]) ; plot2d2(t_nrz, s_nrz, rect=[0, -1.2*A, N*Te, 1.2*A]) ;
xtitle("signal NRZ","temps (s)","amplitude (V)") ;
//
xsetech([ 0, 2/3, 1, 1/3]) ; plot2d(f, DSPdB) ;
xtitle("densité spectrale de puissance", "fréquence (Hz)", "DSP (dB)") ;
```

```
//
// calcul de la puissance moyenne et vérification de Parseval
PMOY_T=1/N*sum(s_nrz^2)
PMOY_F=sum(DSP)
```

On obtient alors les chronogrammes et spectrogrammes suivants (après un zoom à l'aide de « 2D zoom ») :



On peut noter une importante fluctuation autour de la valeur du spectre ; un calcul théorique montre que cette fluctuation est toujours présente, même si le temps d'observation augment.

Vérifions maintenant la forme du spectre ; les symboles étant équiprobables, l'expression de la DSP devient :

$$DSP(f) = \frac{p_0\, p_1}{T} \left\| S_0(f) - S_1(f) \right\|^2$$

Les deux symboles pour les niveaux logiques 1 ou 0 étant identiques aux signes près, nous avons :

$$\left\| S_0(f) \right\| = \left\| S_1(f) \right\| = A\, T \left| \mathrm{sinc}(\pi\, f\, T) \right|$$

La remarque précédente nous autorisant à faire l'addition des modules, nous obtenons finalement :

$$DSP(f) = A^2 T\, \mathrm{sinc}^2(\pi\, f\, T)$$

Dans notre exemple, la durée d'un bit « T » vaut « cse.Te », soit 8 ms (125 Hz de fréquence) et l'amplitude « A », soit 5 volts. On retrouve bien les annulations de puissance aux multiples de 125 Hz et une valeur de 10.log(5 . 0,008) soit –7 dB en pour f=0.

Le calcul de la puissance normalisée par les deux méthodes donne exactement le résultat attendu, à savoir 25 V^2.

Dans le cas de la représentation spectrale, l'intégration de la DSP devrait se faire de $-\infty$ à $+\infty$. Notre spectre étant périodique (signal temporel échantillonné) et échantillonné, cela se traduit par une sommation des échantillons de 0 à Fe, la puissance théoriquement à l'extérieure de cette bande étant prise en compte par l'intermédiaire d'un repliement de spectre (revoir la séance sur les signaux échantillonnés), toutes les valeurs des échantillons étant réelles.

Reprendre cet exercice pour d'autres codages (RZ, Manchester). Pour obtenir le signal temporel, on pourra utiliser la même méthode que précédemment : à partir d'un signal aléatoire composé de 1 et - 1 (ou de 0 si on a utilisé « round » à la place de « sign »), on multiplie cette fois non pas par une matrice de « 1 », mais par une matrice contenant le symbole souhaité.

Bibliographie

Principes fondamentaux des télécommunications par P. Clerc et P. Xavier chez Ellipse
Traitement numérique du signal, une introduction par A.V.M. Van Den Enden et N.A.M. Verhoechx chez Masson.
Transmission de l'information par P. Fraisse, R Protière et D. Marty-Dessus chez Ellipse
Premiers pas pour utiliser Scilab en communications numériques par C. Bazile et A. Duverdier sur le site du CNES et de l'INRIA